Christiane Hoffmann

Une brève explication de la géométrie fractale

Introduction à l'article de Norbert A'Campo: «Complexité fractale et médecine de famille» publié sur le site web de PrimaryCare[1]

Le mathématicien français Benoît Mandelbrot (né en Pologne en 1924) a introduit le concept dans les années 1970 [1], mais la grande fascination pour ce domaine survint il y a une dizaine d'années seulement, lorsque les capacités croissantes des ordinateurs permirent d'effectuer rapidement les opérations complexes dont résultent ces figures fascinantes bien connues aujourd'hui (fig. 1).

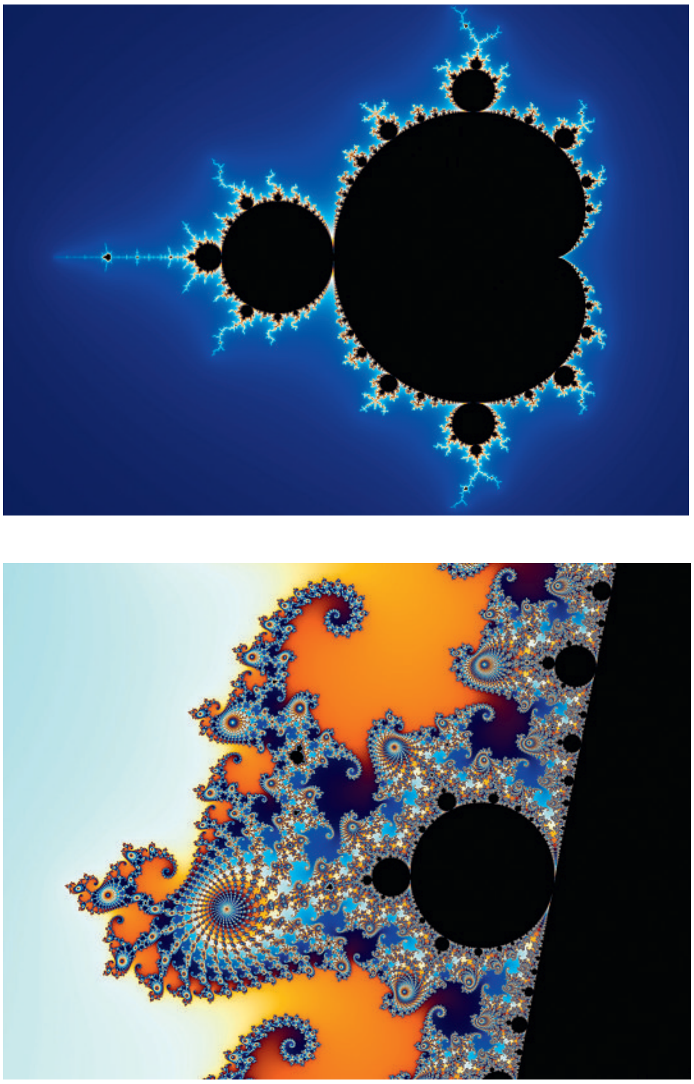

Figure 1
Art fractal – un coup d'œil dans le monde de Mandelbrot (tiré de [2]).

Mais qu'est-ce que la géométrie fractale?

La géométrie fractale est un secteur de la géométrie qui s'intéresse aux objets présentant une structure naturelle ou artificielle très complexe, et qui essaie de modéliser celle-ci selon des lois mathématiques.

Figure 2
Le chou romanesco: une fractale naturelle (photo de Richard Bartz tiré de [3]).

Prenons un exemple: le chou de l'espèce romanesco (fig. 2). Si l'on en coupe un morceau, on obtient un petit romanesco tout à fait semblable au plus grand. Et si de celui-là on prélève encore un plus petit morceau, à nouveau ce dernier est une réplique miniature du plus grand. Le chou romanesco présente une similitude interne, à savoir une propriété géométrique appelée *homothétie*, selon laquelle une partie de l'objet est semblable au tout.
On peut observer cette propriété dans toutes sortes d'objets de la nature: les flocons de neige, les fougères, la ligne d'une côte rocheuse ou les alvéoles pulmonaires, à vrai dire partout où une structure gigogne se répète (éventuellement déformée), quelle que soit l'échelle sous laquelle on la considère.

Une nouvelle dimension

Un second aspect important pour comprendre les fractales est la *dimension*. En géométrie euclidienne, la droite est de dimension 1, la surface de dimension 2, le volume de dimension 3. Les mathématiciens et les physiciens peuvent aisément imaginer d'autres dimensions. Dans la théorie de la relativité par exemple, le temps est considéré comme une quatrième dimension. Mandelbrot comprit cependant que les dimensions en nombres entiers ne suffisaient pas à saisir l'essence des fractales. Il eut alors l'intuition de définir la dimension d'une fractale par le fractionnement (d'où le nom de «fractale» du latin «fractus», brisé) reflétant le facteur de similitude de la figure, c'est-à-dire le rapport entre la partie et le tout.
A l'aide de ces concepts (homothétie et dimension), on commença alors à inventer et à développer des transformations à répétition. Un exemple de ces algorithmes est l'île de Koch (nommée ainsi d'après le mathématicien H. von Koch, qui la conçut en 1904 déjà). Chaque côté d'un triangle équilatéral est partagé en trois et addi-

1 A'Campo N. Fraktale Komplexität und Hausarztmedizin. www.primary-care.ch → Archives → Numéro 10/2009.

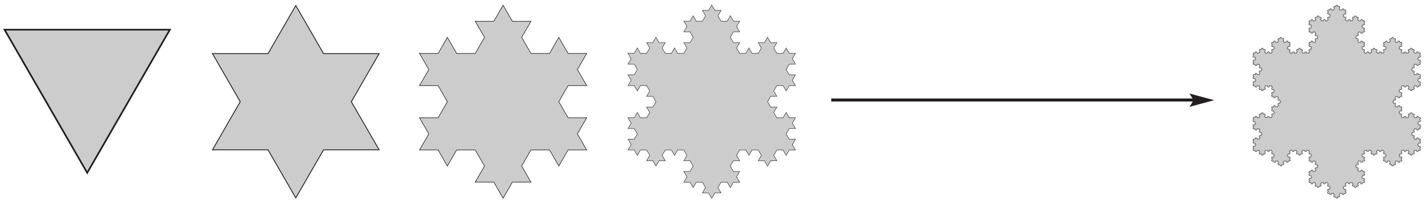

Figure 3
Les étapes de construction de l'île de Koch (tiré de [4]).

tionné d'un triangle identique plus petit. Au bout de quelques itérations seulement naît déjà une figure complexe ressemblant à un flocon de neige (fig. 3). La formule mathématique correspondant à cette transformation attribue à cette fractale une dimension de 1,2618 [5]. Une particularité de cette figure est que, bien que la surface soit clairement limitée (par exemple par un cercle circonscrit), la somme de la multitude des petits côtés tend vers l'infini.
Mais c'est lorsqu'on entreprit de faire tourner les ordinateurs ad libitum avec de tels processus itératifs que survint la surprise. Des figures entièrement nouvelles apparurent, les unes plutôt compactes et bourgeonneuses, les autres présentant de merveilleux motifs en spirale (fig. 1). Ce que Mandelbrot tint tout d'abord pour un défaut de son vieil écran d'ordinateur se révéla être, après maintes répétitions, agrandissements et rapprochements, un monde entièrement nouveau, entre ordre et chaos.

Quel rapport avec la médecine?

Les fractales ne restèrent pas une théorie. On utilise aujourd'hui en biologie des modèles de fractales pour décrire les ramifications des vaisseaux sanguins, de l'aorte aux capillaires. Les grandes artères se divisent en artères moyennes, celles-ci se subdivisent encore jusqu'aux artérioles, toujours selon une structure analogue. Le volume des vaisseaux sanguins est limité mais leur surface très grande. De même pour la géométrie des poumons, avec les bronches et leurs nombreuses ramifications. Vus sous cet aspect, les poumons ont une surface supérieure à celle d'un terrain de tennis, et qui peut être modélisée efficacement par les fractales. En particulier dans le cas du foie, on est parvenu à des représentations graphiques utilisables en chirurgie à l'aide de modèles informatisés.
Ceci n'est qu'une présentation ultrarapide de ce fascinant domaine. Si vous souhaitez lire un article développant des aspects théoriques et que vous ne craignez pas les formules mathématiques, vous pourrez consulter avec intérêt l'article «Complexité fractale et médecine de famille» (en allemand) de Norbert A'Campo dans la version en ligne de PrimaryCare. L'auteur esquisse dans sa conclusion un rapport entre les fractales, figures des frontières, et les organes (notre peau est par exemple une telle frontière) et indique les surprises que peuvent susciter les combinaisons de transformations itératives (par ex. les effets de deux traitements pris séparément par rapport à ceux de deux traitements combinés).

Références

1 Mandelbrot B. Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Paris: Flammarion; 1973.
2 http://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge.
3 http://de.wikipedia.org/wiki/Romanesco.
4 http://commons.wikimedia.org/wiki/Koch_snowflake?uselang=de
5 Devlin K. Sternstunden der modernen Mathematik. München: dtv; 1992.

Christiane Hoffmann
Rédaction PrimaryCare
EMH Editions médicales suisses SA
Farnsburgerstrasse 8
4132 Muttenz
choffmann@emh.ch