Fraktale Komplexität und Hausarztmedizin.

Norbert A'Campo

Eine Transformation kann kompliziert sein. Eine einfache Transformation kann sogar kompliziert sein, wenn man die Transformation iterieren kann. Hier ein Beispiel. Sei X die Menge aller reellen Zahlen, die grösser oder gleich 1 sind und $+\infty$. Sei $\phi : X \to X$ die Transformation definiert durch die Zuordnung

$$a \in X \mapsto \phi(a) := \frac{1}{a - [a]} \in X$$

wobei wir mit $[a]$ die Gaussklammer von a notieren, d.h. $[a]$ ist die ganze Zahl mit $a - 1 < [a] \leq a$. Bei der Berechnung von $\phi(a)$ für a ganz, stossen wir auf $\frac{1}{0}$. Wir vereinbaren jedoch hier $\frac{1}{0} := +\infty$ und auch $[+\infty] = +\infty$. Indem wir ϕ iterieren, erhalten wir für eine Zahl $a \in X$ eine Folge von Elemente aus X, nämlich die Folge

$$a, \phi(a), \phi(\phi(a)), \phi(\phi(\phi(a))), \cdots$$

Für eine ganze positive Zahl n und ein $a \in X$ notieren wir $\phi^n(a) \in X$ das Ergebnis der n-mal iterierten Anwendung von ϕ auf a. Also zum Beispiel $\phi^3(a) = \phi(\phi(\phi(a)))$. Wir können die Folge nun auch mit

$$a, \phi(a), \phi^2(a), \phi^3(a), \cdots, \phi^n(a), \cdots$$

notieren. Wir stellen uns nun vor, dass wir Zahlen $b \in X$ vermessen, und dass wir nur bei dem Messen auf ganze Zahlen abrunden. Zum Beispiel liefert unsere Messapparatur keine höhere Präzision. Genauer, unsere Vermessung von b liefert $[b]$. Um ein a, wie zum Beispiel $a = \sqrt{2}$ oder $a = \pi$ oder $a = e$ oder $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, zu vermessen könnten wir auch gleich einige der $\phi^n(a)$ vermessen. Wir erhalten also einige ganze Zahlen $[\phi^n(a)]$.

Wir iterieren hier 24 mal. Für π erhalten wir dann die Folge $(\phi^n(\pi)), n = 0, 1, 2, \cdots 24$. Einiges Rechnen liefert

$$(3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1)$$

Erstaunlich ist, dass in dieser Folge eine Information über π mit sehr grosse Präzision steckt. Die erste 3 bedeutet, dass π durch

$$3 < \pi \leq 4$$

eingegrenzt ist. Die nächste 7 bedeutet

$$7 < \frac{1}{\pi - 3} \leq 8$$

Wir erhalten die Eingrenzung

$$\frac{25}{8} < \pi \leq \frac{22}{7}$$

Also haben wir höchstens einen Fehler von $\frac{1}{56} = \frac{22}{7} - \frac{2/5}{8}$, d.h. von 2 Hunderstel. Berücksichtigen wir auch die nächste 15, dann erhalten wir die Eingrenzung

$$\frac{22}{7} < \pi \leq \frac{333}{106}$$

d.h. eine Eingrenzung mit Präzision $\frac{1}{742}$. Die 24 Iterierten bestimmen eine Eingrenzung mit sehr hohe Präzision.

Das Fazit ist: Eine Messapparatur mit beschränkter Präzision kann, zusammen mit Iteration einer Transformation, zu Messungen mit sehr hoher Präzision führen.

Welche Transformationen bewirken eine höhere Präzision? Wir untersuchen die Transformation ϕ. Für eine ganze Zahl g und eine ganze Zahl $N > 0$ schränken wir ϕ ein auf das Intervall $I := [g + \frac{1}{N+1}, g + \frac{1}{N}]$. Die Länge von I ist $\frac{1}{N(N+1)}$ und die Länge vom Bild $\phi(I)$ ist 1. Also wirkt ϕ lokal wie ein Zoom mit Zoomfaktor $N(N+1)$.

Tatsache ist, dass Transformationen, die lokal Längen vergrössern, unter Iterationen die Präzision von Messungen vergrössern.

Die Folge $[\phi^n(a)], n = 0, 1, \cdots$, heisst Kettenbruchentwicklung von a. Hier noch als Illustration die Kettenbruchentwicklungen für $a = \pi, e - 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$(3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1)$$

$$(1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, \cdots)$$

$$(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots)$$

$$(1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots)$$

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots)$$

Und nun auch noch einen Abschnitt der Entwicklung, die nicht regelmässig zu sein scheint, für $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$(2, 3, 1, 1, 3, 6, 2, 2, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 13, 8, 1, 1, 2, 6, 2, 3)$$

Sei $f : [0, 3] \to [0, 1]$ die Funktion mit $f(t) = t$ für $t \in [0, 1]$, mit $f(t) = 2 - t$ für $t \in [1, 2]$ und für $t \in [2, 3]$ mit $f(t) = t - 2$. Die Bakkertransformation $\beta : [0, 1] \to [0, 1]$ ist durch $\beta(t) = f(3t)$ definiert. Der Teich wird, mit Faktor 3, lang gewalzt und dann durch Faltungen eine von rechts, eine von links gekürzt. Ein Teichteilchen $a \in [0, 1]$ geht auf Reise,

$$a, \beta(a), \beta^2(a), \cdots, \beta^n(a), \cdots$$

Wiederum können wenig präzise Messungen während dieser Reise die Ausgangslage bestimmen. Zum Beispiel reicht es, mit $-1, 0, +1$ zu notieren, ob $\beta(a)$ sich jeweils in $[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ oder $[\frac{2}{3}, 1]$ befindet. Allerdings gibt es einen wesentlichen Unterschied zum ersten Beispiel. Nur eine solche Messung während der ganzen Reise kann die Ausgangslage a mit vorgebener Präzision eingrenzen. Kommen für die Ausgangslage a nur zwei Stellen $u, v \in [0,1]$ in Frage, dann kann eine Messung während eines Reiseabschnitts zum Beispiel den Befund $a = v$ ausschliessen und somit $a = u$ bestätigen.

Wo sind die Fraktale? Fraktale bilden sich im Grenzgebiet zwischen den Bereichen aus, wo Iterartionen hoher Iterationszahl der Transformation lokal einen Zoomfaktor > 1 oder < 1 aufweisen.

Wiederum nur Beispiele. Sei $\delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Transformation der komplexen Zahlen, definiert durch $\delta(z) = z^3$, oder durch die Zuordnung

$$z \in \mathbf{C} \mapsto \delta(z) := z^3 \in \mathbf{C}$$

Hier ist $\mathbf{C}$ die komplexe Zahlenebene. Diese Transformation wirkt mit Zoomfaktor < 1 auf $D := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ und mit Zoomfaktor > 1 auf $R := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$. Somit sollte der Einheitskreis $S := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ fraktal sein. Der Kreis S ist aber nicht fraktal. Um ein Fraktal zu erhalten, stören wir die Transformation δ, zum Beispiel zu $\delta_u : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definiert durch $\delta_u(z) = z^3 - uz^2$. Hier ist $u \in \mathbf{C}$, klein aber $u \neq 0$. Die gestörte Transformation ist nun $z \in \mathbf{C} \mapsto \delta_u(z) := z^3 - uz^2 \in \mathbf{C}$. Die Bereiche D_u und R_u mit lokalem Zoomfaktor, jeweils < 1 oder > 1, um $p \in \mathbf{C}$ von δ_u^n, wobei n gross in Abhängigkeit von p gewählt ist, verschieben sich. Somit verschiebt sich auch die Grenze S_u. Die Grenze S_u ist ein Fraktal.

Wir stellen uns vorerst die Frage ob die Transformationen δ und δ_u etwas gemeinsam haben? Wir schränken dazu die Transformation δ ein auf D, S, R, sowie auch δ_u auf D_u, S_u, R_u. Wir erhalten sechs Transformationen. $\delta^D, \delta^S, \delta^R, \delta_u^D, \delta_u^S, \delta_u^R$. Zum Beispiel $a \in S_u \mapsto \delta_u(a) \in S_u$. Es stellt nun sich heraus, dass die Transformationen paarweise gekoppelt sind, d.h. δ^D, δ_u^D sind gekoppelt durch eine stetige bijektive Abbildung $K^D : D \to D_u$ mit $\delta_u(a) = K^D(\delta(a))$, sowie auch die Paare δ^S, δ_u^S und δ^R, δ_u^R durch Abbildungen $K^S : S \to S_u$ und $K^R : R \to R_u$ gekoppelt sind.

Dynamisch gesprochen sind die Transformationen δ^D und δ^R einfach. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(\delta^D)^n(a) = 0$, $a \in D$, und $\lim_{n\to\infty}(\delta^R)^n(a) = +\infty$, $a \in R$. Die Transformation δ^S lässt sich an die Bakkerstransformation koppeln. Dazu kann man die Messungen mit den Ergebnisse $-1, 0, +1$ verwenden.

Genauer, seien $A, B, C \in S$ mit $\delta^S(A) = \delta^S(B) = \delta^S(C) = A$. Zum Beispiel: $A = 1, B = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, C = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Seien $A_u, B_u, C_u \in S_u$ mit $\delta_u^S(A_u) = \delta_u^S(B_u) = \delta_u^S(C_u) = A_u$. Wir unterteilen S mittels A, B, C und S_u mittels A_u, B_u, C_u in drei Abschnitte, die wir symbolisch mit $-1, 0, +1$ benennen. Die Kopplung $K^S : S \to S_u$ ist nun so, dass a und $K^S(a)$ gleiche Messwerte haben.

Mit den Kopplungen K^D, K^S, K^R gelten diese dynamische Aussagen auch für die Transformationen $\delta_u^D, \delta_u^S, \delta_u^R$. Zum Beispiel gilt: $\lim_{n\to\infty}(\delta_u^D)^n(a) = 0$, $a \in D_u$, wobei u die Nullstelle von $z^3 - uz^2 - z$ oder Fixpunkt von δ_u ist. Interessant ist die neue Beschreibung vom Bereich D_u, nämlich $D_u \subset \mathbf{C}$ ist die Teilmenge in $\mathbf{C}$ aller $a \in \mathbf{C}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(\delta_u)^n(a) = 0$$

Die entsprechende Beschreibung von R_u ist

$$R_u = \{a \in \mathbf{C} \mid \lim_{n\to\infty} (\delta_u)^n(a) = \infty\}$$

Also ist δ eine Zusammensetzung von drei Transformationen $\delta^D, \delta^S, \delta^R$, sowie δ_u die Zusammensetzung von $\delta_u^D, \delta_u^S, \delta_u^R$.

Nun die Frage, wie die Transformationen δ und δ_u sich unterscheiden? Der Unterschied steckt in der Verklebung von den Grenzen von D und R und der Verklebung von den Grenzen von D_u und R_u. In welcher Hinsicht die Verklebungen verschieden sind, kann ich in diesem kurzen Beitrag nicht weiter beschreiben.

Ein Fazit, vielleicht relevant für die Medizin, ist: wenn die Wirkungen von zwei Behandlungen einzeln verstanden sind, dann birgt deren Zusammensetzung noch Überraschungen. Man interpretiere Iterieren als Langzeitwirkung.

Fraktale tauchen im Grenzgebiet auf. Unsere Haut ist eine solche Grenze. Probleme im Körper können Fraktale auf der Haut produzieren! Umgekehrt, Fraktale können nutzlich sein. Die Lunge, auch eine Grenze, ist wie ein Fraktal!

Universität Basel, Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel.