Christiane Hoffmann

Ein Versuch, fraktale Geometrie zu erklären

Einführung zum Artikel von Norbert A'Campo: «Fraktale Komplexität und Hausarztmedizin» (publiziert auf der Website von PrimaryCare)[1]

Der französische Mathematiker Benoît Mandelbrot (geboren 1924 in Polen) hat den Begriff in den 1970-er Jahren erfunden [1], aber die grosse Faszination für dieses Gebiet kam erst vor gut zehn Jahren auf mit der Entwicklung von sehr grossen Computern, die mühelos und schnell die komplexen Operationen, durch die diese bekannten psychedelischen Gebilde entstehen, ausführen konnten (Abb. 1).

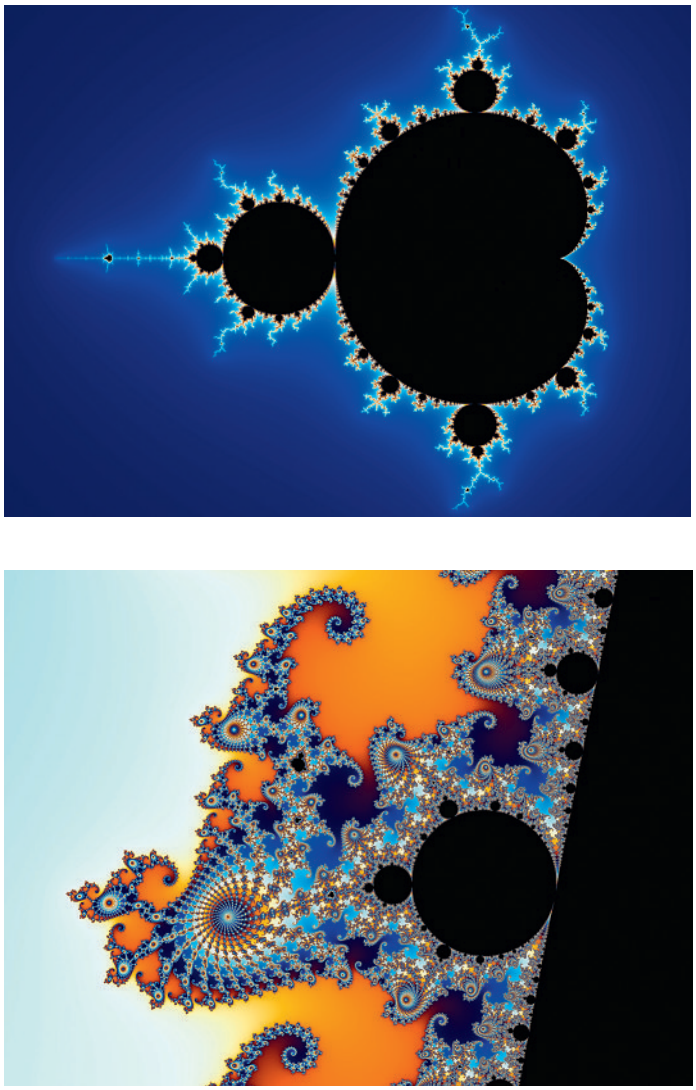

Abbildung 1
Fraktale Kunst – ein Blick in Mandelbrots Welt (Bild aus [2]).

Was ist fraktale Geometrie?

Die fraktale Geometrie ist ein Teilgebiet der Geometrie, das versucht, natürliche oder künstliche Gebilde, die eine sehr komplexe Struktur haben, anhand mathematischer Gesetze zu beschreiben.
Nehmen wir ein Beispiel: der Blumenkohl, und am besten die Sorte Romanesco (Abb. 2). Wenn man ein Stück davon abbricht, bekommt man einen kleineren ähnlichen Romanesco. Und davon nochmal ein Stückchen ergibt einen Blumenkohl in Miniatur. Der Blumenkohl hat eine innere Ähnlichkeit, d.h. eine geometrische Eigenschaft (auch genannt Homothetie), nach der ein Teil des Objektes dem Ganzen ähnlich ist.
Diese Eigenschaft lässt sich verschiedentlich in der Natur beobachten: in den Schneeflocken, dem Farn, den Lungenbläschen oder der Linie einer Felsenküste, sozusagen überall, wo eine Struktur sich wiederholt (auch eventuell deformiert), egal unter welchen Massstab man sie beobachtet.

Abbildung 2
Romanesco: ein natürliches Fraktal (Foto von Richard Bartz aus [3]).

Eine neue Dimension

Ein zweiter wichtiger Aspekt, um die Fraktale zu verstehen, ist die Dimension. In der klassischen Geometrie ist eine Gerade eindimensional, eine Fläche zweidimensional, ein Volumen dreidimensional. Mathematiker oder Physiker können sich weitere Dimensionen ausdenken, zum Beispiel in der Relativitätstheorie wird die Zeit als eine vierte Dimension betrachtet. Mandelbrot entdeckte, dass diese Dimensionen nicht genügten, um das Wesen der Fraktale zu erfassen. Er definierte die Dimension eines Fraktals durch einen Bruch (auf französisch: fraction, deswegen der Namen «fractal»), der dem Selbstähnlichkeitsfaktor der Gebilde entspricht, oder anders gesagt, das Verhältnis zwischen dem Ganzen und dem Teil widerspiegelt.
Anhand dieser Begriffe (Homothetie, Dimension) begann man Iterationsmuster (Wiederholung von Transformationen) zu erfinden oder weiter zu entwickeln. Ein Beispiel dafür ist die so genannte Koch-Schneeflocke (nach dem Mathematiker H. von Koch, der diese schon 1904 entwarf). Jede Seite eines einfachen Dreiecks wird

1 A'Campo N. Fraktale Komplexität und Hausarztmedizin. www.primary-care.ch → Archiv → Heft 10/2009.

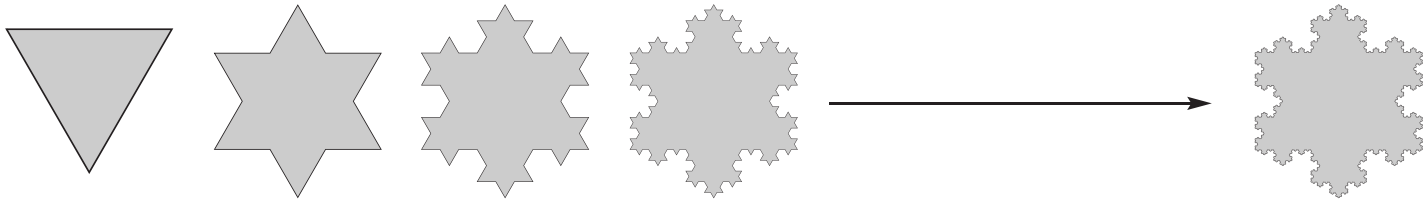

Abbildung 3
Die Entstehung der Koch-Schneeflocke (aus [4]).

gedrittelt und mit einem kleineren Dreieck ergänzt. Nach wenigen Schritten entsteht schon eine komplexe Gestalt, die an eine Schneeflocke erinnert (Abb. 3). Eine mathematische Formel ergibt ihre Dimension: 1,2618, eben eine gebrochene Zahl [5]. Eine Besonderheit dieser Figur ist, dass die Summe der Längen der vielen kleinen Seiten potentiell unendlich wird, obwohl die Fläche begrenzt ist (zum Beispiel von einem Umkreis).
Als man begann, Computer mit solchen Iterationsprozessen zu speisen und ad libitum laufen zu lassen, kam die grosse Überraschung. Es entstanden völlig neue graphische Gestalten, die einen knollig, die anderen mit wunderschönen verschlungenen Mustern wie Spiralen (Abb. 1). Was Mandelbrot zuerst für einen Fehler seines alten Bildschirms hielt, erwies sich aber nach Wiederholungen, Annäherungen und Vergrösserungen als eine völlig neue Welt, zwischen Chaos und Ordnung.

Und in der Medizin?

Die Fraktale blieben nicht eine Theorie. In der Biologie braucht man heute fraktale Modelle, um die Verzweigung der Blutgefässe zu beschreiben, von der Aorta bis zu den Kapillargefässen. Die grossen Arterien teilen sich in mittlere Arterien, dann in Arteriolen, immer mit einer ähnlichen Struktur. Das Volumen der Blutgefässe ist begrenzt, aber ihre Fläche sehr gross. Ebenso ist es in der Geometrie der Lungen mit den Bronchien und ihren vielen Verzweigungen. So betrachtet haben die Lungen eine Fläche, die grösser als ein Tennisplatz ist – was effizient mit Fraktalen dargestellt werden kann. Besonders im Falle der Leber ist es gelungen, dieses Netzwerk abzubilden und mit Hilfe von Computermodellen für die Chirurgie nutzbar zur Verfügung zu stellen.
Dies ist bloss eine sehr vereinfachte Darstellung dieses faszinierenden Gebiets. Wer aber theoretische Ausführungen zu Fraktalen kennenlernen möchte und mathematische Formeln nicht scheut, wird mit Interesse den Artikel «Fraktale Komplexität und Hausarztmedizin» von Norbert A'Campo lesen in der Online-Version von PrimaryCare, wo der Autor in seiner Schlussfolgerung einen Bezug erwähnt zwischen Fraktalen in Grenzgebieten und Körperorganen (z.B. ist unsere Haut eine solche Grenze) und auch auf die Überraschungen verweist, die Zusammensetzungen von Transformationen verbergen können (zwei Behandlungen einzeln versus zwei Behandlungen kombiniert).

Literatur

1 Mandelbrot B. Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Paris: Flammarion; 1973.
2 http://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge.
3 http://de.wikipedia.org/wiki/Romanesco.
4 http://commons.wikimedia.org/wiki/Koch_snowflake?uselang=de
5 Devlin K. Sternstunden der modernen Mathematik. München: dtv; 1992.

Christiane Hoffmann
Redaktion PrimaryCare
EMH Schweizerischer Ärzteverlag AG
Farnsburgerstrasse 8
4132 Muttenz
choffmann@emh.ch